BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUY NHƠN

NGUYỄN THỊ MAI VÂN

MỘT SỐ BẤT BIẾN CỦA ĐA TẠP ĐẠI SỐ

Chuyên ngành: Đại số và Lí thuyết số
Mã số: 9 46 01 04

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Bình Định - 2024

Công trình được hoàn thành tại:
Trường Đại học Quy Nhơn

Tập thể hướng dẫn:
PGS. TS. Đặng Tuấn Hiệp
PGS. TS. Lê Công Trình

Phản biện 1: PGS. TS. Đoàn Trung Cường

Phản biện 2: TS. Trần Quang Hóa

Phản biện 3: PGS. TS. Nguyễn Thị Hồng Loan

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng đánh giá luận án tại
Trường Đại học Quy Nhơn vào lúc ... giờ ... ngày ... tháng ... năm 2024

Có thể tìm hiểu luận án tại:
- Thư viện Quốc gia Việt Nam
- Thư viện Trường Đại học Quy Nhơn

Mục lục

Mở đầu

Các đa tạp đại số là đối tượng nghiên cứu chính trong Hình học đại số. Bên cạnh các phương pháp của Hình học đại số và Giải tích cổ điển như dựa vào phương trình xác định, các phương pháp của Hình học đại số hiện đại mang đến nhiều cách tiếp cận hiệu quả hơn. Một trong các cách tiếp cận hiện đại đó là dựa vào lý thuyết giao. Lý thuyết giao của đa tạp đại số được các nhà Toán học xây dựng một cách hệ thống và trình bày nhiều ứng dụng vào việc nghiên cứu các bất biến của các đa tạp đại số. Ví dụ điển hình nhất trong phương pháp tiếp cận này là nghiên cứu các số giao trên đa tạp Grassmann. Cách tiếp cận này đã được nhiều nhà Toán học quan tâm và gần đây đã đem đến nhiều kết quả thú vị.

Các nghiên cứu liên quan đến đa tạp Grassmann được bắt đầu từ thế kỷ 19 với tên tuổi của nhiều nhà Toán học như Schubert, Grassmann. Cùng với sự phát triển của Hình học đại số hiện đại, việc tính toán số giao trên đa tạp Grassmann được xem xét lại theo hướng sử dụng kỹ thuật địa phương hóa trong lý thuyết giao đẳng biến. Kỹ thuật địa phương hóa là một công cụ mạnh được sử dụng trong nhiều lĩnh vực nghiên cứu khác nhau như Hình học đại số, Tôpô đại số, Hình học symplectic, Tổ hợp đại số và Lý thuyết kỳ dị. Kỹ thuật địa phương hóa đã được nghiên cứu bởi nhiều nhà toán học nổi tiếng như Borel [9], Atiyah-Bott [6] và Berline-Vergne [7]... Gần đây, bằng cách sử dụng một biến thể của đa thức nội suy cho các đa thức đối xứng bậc bị chặn, Hiep [33] đã chỉ ra các đồng nhất thức liên quan đến các đa thức đối xứng. Từ đó, một cách khác để xử lý các số giao trên đa tạp Grassmann được đưa ra. Kết quả này cung cấp công cụ cho việc lập trình tính toán hình thức, cơ sở để thiết lập những công thức mới liên quan đến những bất biến của đa tạp đại số. Trong phạm vi của luận án, chúng tôi sử dụng các kết quả này để nghiên cứu một số nội dung liên quan đến các bất biến của một đa tạp xạ ảnh cụ thể gồm bậc và giống của đa tạp Fano, đặc trưng Euler của phân thớ Tango và bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định. Chúng tôi đánh giá các nghiên cứu trên có ý nghĩa khoa học và thực tiễn. Công việc này hứa hẹn sẽ mang lại một số kết quả tốt và có thể sẽ thu hút sự quan tâm của nhiều nhà Toán học trên thế giới.

Các nghiên cứu liên quan đến đa tạp Fano được bắt đầu từ cách đây hơn 40 năm với các kết quả của Altman-Kleiman [4], Barth-Van de Ven [7], Debarre-Manivel [16], Langer [38], Markushevich [40], Tennison [51], cũng như những kết quả mới gần đây của Hiep [31]. Kế thừa các kết quả trên, mục tiêu nghiên cứu đầu tiên của chúng tôi trong luận án này, đó là nghiên cứu về bậc và giống của đa tạp Fano, bởi những thông tin về các bất biến này cung cấp các ứng dụng quan trọng trong việc phân loại các lớp đa tạp này.

Bậc của đa tạp đại số phụ thuộc vào phép nhúng của nó vào một không gian xạ ảnh. Bậc của đa tạp xạ ảnh phức X là số giao điểm của X với một đa tạp tuyến tính tổng quát có đối chiều bằng số chiều của X. Nếu đa tạp xạ ảnh được cho bởi phương trình đa thức thì bậc của nó có thể được tính bằng kỹ thuật cơ sở Gröbner. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp việc xác định phương trình định nghĩa một đa tạp xạ ảnh là cực kỳ khó khăn. Khi đó, bậc có thể được tính bằng các công cụ của lý thuyết giao được phát triển bởi William Fulton từ những năm đầu thập niên 1980. Một ví dụ điển hình cho trường hợp này là đa tạp Fano của các không gian con tuyến tính trên các siêu mặt xạ ảnh hoặc giao đầy đủ xạ ảnh. Các đa tạp Fano này là đa tạp con của đa tạp Grassmann. Thông qua phép nhúng Plücker thì chúng có cấu trúc của một đa tạp xạ ảnh. Bằng ngôn ngữ của lý thuyết giao, bậc của đa tạp Fano có thể biểu diễn như là một số giao của các lớp đặc trưng trên đa tạp Grassmann [22, Ví dụ 14.7.13]. Trên cơ sở đó, các công thức tường minh về bậc của đa tạp Fano cũng được chỉ ra bởi Debarre - Manivel [16, Định lý 2.1] và Hiep [33, Định lý 1.1]. Tiếp tục hướng nghiên cứu này, bằng cách sử dụng phương pháp xử lý số giao của các lớp đặc trưng trên đa tạp Grassmann được khám phá bởi Hiep [33], chúng tôi đã thiết lập một đặc trưng tổ hợp cho bậc của đa tạp Fano của các không gian con tuyến tính trên một giao đầy đủ tổng quát thông qua hệ số của một đơn thức đặc biệt trong khai triển của một đa thức đối xứng, xem Định lý 2.5.3. Đặc biệt, trong trường hợp chiều của đa tạp Fano bằng 1, chúng tôi đã chỉ ra công thức liên hệ giữa giống và bậc, xem Định lý 2.6.1.

Quan tâm tiếp theo của chúng tôi trong luận án này là áp dụng các kỹ thuật tính toán của lý thuyết giao trên không gian xạ ảnh để thiết lập một công thức cho đặc trưng Euler của phân thớ Tango.

Không gian xạ ảnh là trường hợp đặc biệt của đa tạp Grassmann. Phân thớ vectơ trên không gian xạ ảnh thu hút được nhiều sự quan tâm của các nhà Toán học trên thế giới. Một phân thớ vectơ được gọi là không phân tách được nếu nó không thể phân tích thành tổng trực tiếp của các phân thớ vectơ có hạng nhỏ hơn. Xây dựng các phân thớ vectơ không phân tách được trên không gian xạ ảnh là một vấn đề khó trong Hình học đại số. Hartshorne [26] đã khẳng định rằng chúng ta không thể xây dựng được các phân thớ vectơ không phân tách được trong trường hợp số chiều lớn và số hạng nhỏ. Cụ thể hơn, Hartshorne đã chỉ ra rằng mọi phân thớ vectơ hạng 2 trên không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ với $n \geq 7$ đều tách được thành tổng trực tiếp của các phân thớ đường thẳng. Năm 1976, Tango [51] đã chỉ ra một ví dụ thú vị về một phân thớ vectơ không phân tách được hạng $n-1$ trên không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ và được gọi là phân thớ Tango. Theo Định lý Hirzebruch-Riemann-Roch [22], đặc trưng Euler của phân thớ Tango có thể được xác định thông qua đặc trưng Chern và lớp Todd của phân thớ vectơ. Đặc biệt, trên không gian xạ ảnh, đặc trưng Chern và lớp Todd của phân thớ vectơ khá đơn giản. Với cách tiếp cận này, chúng tôi tính được đặc trưng Chern của phân thớ vectơ Tango trên không gian xạ ảnh (xem Mệnh đề 3.3.2) và lớp Todd của phân thớ tiếp xúc trên không gian xạ ảnh (xem Mệnh đề 3.4.1). Từ đó, chúng tôi chỉ ra được kết quả cho đặc trưng Euler của phân thớ Tango trên không gian xạ ảnh n - chiều (xem Định lý 3.5.2).

Quy hoạch nửa xác định là một bài toán quan trọng của Quy hoạch toán học bắt đầu từ năm 1990. Bài toán này có ứng dụng rất đa dạng trong Tối ưu lồi, Lý thuyết điều khiển và Tối ưu hóa tổ hợp. Quan tâm cuối cùng của chúng tôi trong luận án là xác định một đặc trưng cho bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định.

Quy hoạch nửa xác định là bài toán có dạng:

$$\min_{X \in \mathbb{S}^n} C \bullet X \text{ với ràng buộc } A_i \bullet X = b_i, \forall i = 1, \dots, m \text{ và } X \succeq 0,$$

trong đó $C, A_1, \dots, A_m \in \mathbb{Q}\mathbb{S}^n, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{Q}$ và

$$C \bullet X := \text{Trace}(C \cdot X) = \sum c_{ij} x_{ij}.$$

Chúng ta biết rằng các tọa độ của ma trận tối ưu là các nghiệm của các đa thức một biến. Nếu các dữ liệu là tổng quát thì bậc của các đa thức này chỉ phụ thuộc vào hạng r của ma trận tối ưu và bậc này được gọi là bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định, ký hiệu là $\delta(m,n,r)$. Chú ý rằng bậc đại số $\delta(m,n,r)$ trong quy hoạch nửa xác định chỉ được định nghĩa tốt nếu bộ ba (m,n,r) thỏa mãn bất đẳng thức Pataki [44, Mệnh đề 5], tức là

$$\binom{n-r+1}{2} \leq m \leq \binom{n+1}{2} - \binom{r+1}{2}.$$

Trong [44], Nie, Ranestad và Sturmfels đã giới thiệu và chỉ ra rằng bậc đại số $\delta(m,n,r)$ trong quy hoạch nửa xác định bằng với bậc của một đa tạp đối ngẫu [44, Định lý 13] bằng phương pháp hình học đại số phức. Đặc biệt, một trong các kết quả chính của họ là chỉ ra nhiều công thức cho bậc đại số $\delta(m,n,r)$ trong quy hoạch nửa xác định với các giá trị m,n,r đặc biệt [44, Định lý 11] bằng cách tính các số Euler của đa tạp trơn, bậc của đa tạp định thức... Sau đó, bằng ngôn ngữ của lý thuyết giao, von Bothmer và Ranestad đã chỉ ra bậc đại số $\delta(m,n,r)$ trong quy hoạch nửa xác định có thể được tính toán như một số giao của lớp Segre của lũy thừa đối xứng thứ hai của phân thớ phổ dụng trên đa tạp Grassmann $G(k,n)$ [11, Mệnh đề 4.1]. Đồng thời, họ cũng đưa ra một công thức tường minh để tính bậc đại số $\delta(m,n,r)$ trong quy hoạch nửa xác định dưới dạng tổng của các hàm giá trị nguyên theo các dãy con của tập $\{1,\ldots,n\}$ [11, Định lý 1.1]. Gần đây, sử dụng kỹ thuật địa phương hóa trong lý thuyết giao đẳng biến, Hiep [30, Định lý 1] cũng đã đề xuất một công thức tính bậc đại số dưới dạng tổng của các hàm phân thức đối xứng. Dựa vào các kết quả liên quan đến đồng nhất thức trên đa thức đối xứng kép được đưa ra bởi Hiep [33], chúng tôi chỉ ra một đặc trưng tổ hợp cho bậc đại số $\delta(m,n,r)$ trong quy hoạch nửa xác định dưới dạng hệ số của một đơn thức đặc biệt trong khai triển của một đa thức đối xứng kép (xem Định lý 4.6.1). Kết quả của định lý này cung cấp một phương pháp tổ hợp để tính bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định. Như một cách áp dụng, chúng tôi sử dụng đặc trưng này chứng minh lại các kết quả của Nie - Ranestad - Sturmfels theo một cách đơn giản hơn. Hơn nữa, chúng tôi còn chỉ ra nhiều kết quả liên quan đến các đa thức Schur, đa thức đối xứng sơ cấp và đa thức đối xứng thuần nhất đầy đủ (xem Mệnh đề 4.7.1 và Mệnh đề 4.7.2). Những kết quả này đóng góp thêm nhiều điều thú vị liên quan đến các lớp đa thức đối xứng cơ bản này. Bên cạnh đó, chúng tôi cũng cung cấp thêm một cách chứng minh độc lập cho Định lý 4.5.1 trong [33] từ cảm hứng của Don Zagier trong [25, Mệnh đề A.1].

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận và Tài liệu tham khảo, nội dung chính của Luận án được trình bày trong bốn chương.

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị. Trong chương này, chúng tôi trình bày các định nghĩa và kết quả cơ bản, mang tính chất chuẩn bị cho các lập luận ở các phần sau của Luận án, gồm các kiến thức cơ sở của Hình học đại số, cơ sở của lý thuyết giao, phép tính Schubert, đa thức đối xứng và lý thuyết giao đẳng biến.

Chương 2: Bậc của đa tạp Fano. Trong chương này, chúng tôi trình bày chi tiết kết quả của hai bài báo [36] và [34]. Cụ thể hơn, chúng tôi đưa ra một đặc trưng tổ hợp cho bậc của đa tạp Fano của các không gian con tuyến tính trên một giao đầy đủ trong không gian xạ ảnh phức dưới dạng hệ số đặc biệt của một đa thức đối xứng. Đồng thời, chúng tôi thiết lập một công thức liên hệ giữa bậc và giống của đa tạp Fano trong trường hợp chiều của đa tạp Fano bằng 1.

Chương 3: Đặc trưng Euler của phân thớ Tango. Trong chương này, chúng tôi trình bày chi tiết các kết quả chính trong bài báo [14]. Cụ thể hơn, chúng tôi đưa ra một công thức cho đặc trưng Euler của phân thớ Tango.

Chương 4: Bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định. Trong chương này, chúng tôi trình bày chi tiết các kết quả chính trong bài báo [37]. Cụ thể hơn, chúng tôi đưa ra một đặc trưng tổ hợp cho bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định. Sau đó, sử dụng đặc trưng này kết hợp với các kết quả của các lớp đa thức đối xứng được tìm thấy, chúng tôi chứng minh lại các kết quả của Nie, Ranestad và Sturmfels [44] bằng phương pháp đơn giản hơn.

Mặc dù bản thân đã nỗ lực và rất cố gắng để thực hiện luận án tốt nhất, nhưng do điều kiện thời gian có hạn, trình độ kiến thức và kinh nghiệm nghiên cứu còn hạn chế nên luận án khó tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được những góp ý của quý Thầy cô giáo và bạn đọc để luận án được hoàn thiện hơn.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi trình bày các định nghĩa và kết quả cơ bản, mang tính chất chuẩn bị cho các lập luận ở các phần sau của Luận án, gồm các kiến thức cơ sở của Hình học đại số, cơ sở của Lý thuyết giao, phép tính Schubert, đa thức đối xứng và lý thuyết giao đẳng biến.

1.1 Cơ sở của Hình học đại số

1.1.1 Đa tạp xạ ảnh

Định nghĩa 1.1.1 ([48, Chương 3])**.** Cho $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ là các đa thức thuần nhất. Tập hợp

$$Z(f_1, \ldots, f_k) := \{[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid f_i(x_0, \ldots, x_n) = 0, \forall i = \overline{1, k}\} \subseteq \mathbb{P}^n$$

gọi là *đa tạp đạ số xạ ảnh* xác định bởi $f_1, \ldots, f_k$.

Định nghĩa 1.1.2 ([48, Chương 3])**.** Một tập đại số xạ ảnh $X \subseteq \mathbb{P}^n$ được gọi là *khả quy* nếu X có thể được biểu diễn thành một hợp của hai tập đại số xạ ảnh

$$X = X_1 \cup X_2, \quad X_1, X_2 \subsetneq X.$$

Ngược lại, ta nói X là *bất khả quy* nếu X không có biểu diễn như vậy. Một *đa tạp xạ ảnh* là một tập đại số xạ ảnh bất khả quy.

Định nghĩa 1.1.3 ([48, Mục 5.5])**.** Cho $X \subseteq \mathbb{P}^n$ là một đa tạp xạ ảnh. *Bậc* của đa tạp xạ ảnh X, ký hiệu là $\deg X$, là số giao điểm hữu hạn lớn nhất của X và một đa tạp tuyến tính tổng quát trong $\mathbb{P}^n$ có đối chiều bằng số chiều của X.

1.1.2 Đa tạp Grassmann

Định nghĩa 1.1.4. ([20, Chương 3].) Cho V là một không gian vectơ n chiều trên trường $\mathbb{C}$ và k là các số nguyên dương sao cho $1 \le k \le n$. *Đa tạp Grassmann* $G(k, V)$ là tập hợp gồm tất cả các không gian vectơ con k chiều của không gian vectơ V.

Định nghĩa 1.1.5 ([20, Chương 3])**.** Ánh xạ

$$\begin{array}{rcccl} p_{k,n} & : & G(k,n) & \longrightarrow & \mathbb{P}\left(\bigwedge^k V\right) \\ & & \operatorname{span}\{v_1,\dots,v_k\} & \longmapsto & [v_1\wedge\cdots\wedge v_k] \end{array}$$

được gọi là *phép nhúng Plücker* .

Định lý 1.1.1 ([28, Định lý 11.35])**.** *Ảnh của phép nhúng Plücker $p_{k,n}(G(k,n))$ là một đa tạp xạ ảnh trong $\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ xác định bởi iđêan sinh bởi các quan hệ Plücker.*

1.2 Cở sở của Lý thuyết giao

1.2.1 Vành Chow

Định nghĩa 1.2.1 ([20, Chương 1])**.** Cho X là đa tạp xạ ảnh trên trường $\mathbb{C}$ và k là một số nguyên không âm.

i. *Một k - chu trình* trên X là một tổng hình thức hữu hạn $\sum n_i[V_i]$, với V_i là các đa tạp con k - chiều của X và n_i là các số nguyên. Mỗi 1 - chu trình được gọi là một *ước*. Chu trình $\alpha = \sum n_i[V_i]$ được gọi là *hữu hiệu* nếu tất cả các hệ số n_i đều không âm.

ii. *Nhóm các k - chu trình* trên X, ký hiệu là $Z_k(X)$, là nhóm abel tự do sinh bởi các đa tạp con k - chiều của X.

iii. *Nhóm các chu trình* trên X là tổng trực tiếp của các nhóm k - chu trình trên X, ký hiệu là $Z_*(X)$, tức là

$$Z_*(X) = \bigoplus_{k=0}^{\dim X} Z_k(X).$$

Với bất kì đa tạp con $(k+1)$ - chiều W của X và $\varphi \in R(W)^*$ là một hàm hữu tỷ khác không bất kì. *Một k - chu trình của φ* trên X, ký hiệu là $[\operatorname{div}(\varphi)]$, được định nghĩa bởi

$$[\operatorname{div}(\varphi)] = \sum_V \operatorname{ord}_V(\varphi)[V] \in Z_k(X),$$

trong đó tổng trên chạy qua tất cả các đa tạp con V đối chiều một của W.

Định nghĩa 1.2.2 ([20, Chương 1])**.**

i. Một k-chu trình α được gọi là *tương đương hữu tỉ* với không, ký hiệu bởi $\alpha \sim 0$, nếu có một số hữu hạn các đa tạp con $(k+1)$ - chiều W_i của X và các hàm $\varphi_i \in R(W_i)$ khác không sao cho

$$\alpha = \sum_i [\operatorname{div}(\varphi_i)].$$

ii. Hai k - chu trình α và β được gọi là tương đương hữu tỉ, ký hiệu là $\alpha \sim \beta$, nếu chu trình $\alpha - \beta$ tương đương hữu tỉ với 0.

Vì $[\operatorname{div}(\varphi^{-1})] = -[\operatorname{div}(\varphi)]$ nên tập tất cả các k - chu trình sao cho mỗi k - chu trình là tương đương hữu tỉ với 0 lập thành một nhóm con của $Z_k(X)$, ta ký hiệu nhóm con này bởi $\operatorname{Rat}_k(X)$. Khi đó với mỗi số nguyên dương k, ta có nhóm thương

$$A_k(X) = Z_k(X)/\operatorname{Rat}_k(X).$$

Định nghĩa 1.2.3 ([20, Chương 1])**.** Với các ký hiệu ở trên, nhóm

$$A_*(X) = \bigoplus_{k=0}^{\dim X} A_k(X),$$

được gọi là *nhóm Chow* của X. Mỗi phần tử của nhóm $A_*(X)$ gọi là một *lớp chu trình* trên X.

Bổ đề 1.2.1 ([20, Chương 1])**.** *Cho X là một đa tạp xạ ảnh trơn. Khi đó*

i. Với mọi $\alpha, \beta \in A(X)$ luôn tồn tại hai chu trình hoành tổng quát $A = \sum m_i A_i$ và $B = \sum n_j B_j$ trong $Z(X)$ lần lượt đại diện cho α và β.

ii. Lớp chu trình

$$\sum_{i,j} m_i n_j [A_i \cap B_j]$$

trong $A(X)$ không phụ thuộc vào cách chọn A và B.

Định lý 1.2.1 ([20, Chương 1])**.** *Cho X là một đa tạp xạ ảnh trơn. Khi đó tồn tại duy nhất một phép nhân trên $A(X)$ thỏa mãn điều kiện:*

$$[A].[B] = [A \cap B],$$

trong đó A và B là hai đa tạp con của X hoành tổng quát.

Phép nhân này làm cho $A(X)$ trở thành một vành phân bậc, kết hợp và giao hoán, được gọi là vành Chow của đa tạp X.

Ví dụ 1.2.1. ([20, Chương 1]). Vành Chow của không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ là

$$A(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[h]/(h^{n+1}).$$

trong đó h là lớp siêu phẳng của $\mathbb{P}^n$.

Định nghĩa 1.2.4 ([22, Chương 1])**.** Cho X là là đa tạp xạ ảnh trơn n chiều trên trường $\mathbb{C}$ và α là một 0 - chu trình trên X. *Bậc của chu trình* α, ký hiệu là $\int_X \alpha$, được xác định bởi

$$\int_X \alpha = p_*(\alpha),$$

trong đó $p : X \to \operatorname{Spec}(\mathbb{C})$ và $A_0(\operatorname{Spec}(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z} \cdot [\operatorname{Spec}(\mathbb{C})]$ đồng nhất với $\mathbb{Z}$.

1.2.2 Phân thớ vectơ

Định nghĩa 1.2.5. ([5, Mục 7]). Cho X là một đa tạp xạ ảnh trên trường $\mathbb{C}$. Một *phân thớ vectơ* hạng r trên X là một bộ ba (E, X, π), trong đó E là một đa tạp xạ ảnh và $\pi\colon E \longrightarrow X$ là một đồng cấu sao cho tồn tại một phủ mở $\{U_i\}$ của X thỏa mãn các điều kiện sau:

i. Với mọi $i \in I$, tồn tại một đẳng cấu $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}^r$ sao cho biểu đồ sau giao hoán

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\pi"'] & U_i \times \mathbb{C}^r \arrow[d, "p"] \\ & U_i \end{tikzcd}$$

trong đó $p : U_i \times \mathbb{C}^r \to U_i$ là một phép chiếu tự nhiên.

ii. Với mọi $i, j \in I$, tồn tại một ma trận $(g_{ij})_{r\times r}$ với các phần tử là các hàm trên $U_i \cap U_j$ sao cho đồng cấu hợp thành

$$\psi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^r \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^r$$

xác định bởi $\psi_{ij}(x, v) = (x, g_{ij}(x)v)$.

1.2.3 Lớp Chern và lớp Segre của phân thớ vectơ

Định nghĩa 1.2.6 ([20, Chương 5])**.** *Lớp Chern thứ k* của phân thớ vectơ E, ký hiệu bởi $c_k(E)$, được định nghĩa như sau:

$$c_k(E) := x_k \in A^k(X), \text{ với mọi } k = 1, \dots, r.$$

Lớp Chern toàn phần của phân thớ vectơ E, ký hiệu là $c(E)$, được định nghĩa bởi

$$c(E) = 1 + c_1(E) + c_2(E) + \cdots + c_r(E).$$

Lớp Segre thứ k của phân thớ vectơ E, ký hiệu bởi $s_k(E)$, được định nghĩa theo phương pháp truy hồi như sau:

$$s_k(E) + s_{k-1}(E)c_1(E) + \ldots + s_1(E)c_{k-1}(E) + c_k(E) = 0, \text{ với mọi } k = 1, \dots, r.$$

Lớp Segre toàn phần của phân thớ vectơ E được định nghĩa:

$$s(E) = 1 + s_1(E) + \ldots + s_r(E).$$

1.3 Phép tính Schubert

Cho đa tạp Grassmann $G(k, n)$ gồm tất cả các không gian con k chiều của không gian vectơ n chiều V. Lấy $\mathcal{V}$ là một cờ trong V, tức là một dãy lồng nhau các không gian con của V

$$0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V, \text{ trong đó } \dim V_i = i \text{ với mọi } i.$$

Với mỗi dãy các số nguyên $a = (a_1, \dots, a_k)$ thỏa $n - k \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k \geq 0$, chúng ta định nghĩa *chu trình Schubert*

$$\Sigma_a(\mathcal{V}) = \{W \in G(k,n) : \dim(V_{n-k+i-a_i} \cap W) \geq i, \forall i = 1, \dots, k\}.$$

Theo [20], lớp chu trình $[\Sigma_a(\mathcal{V})]$ không phụ thuộc vào việc chọn $\mathcal{V}$. Khi đó, chúng ta định nghĩa *lớp Schubert* tương ứng với a là $\sigma_a := [\Sigma_a(\mathcal{V})]$.

Để thuận tiện, chúng ta viết σ_{p^i} khi $a = (p, \dots, p, 0, \dots, 0)$ với i thành phần đầu tiên bằng p. Các lớp chu trình σ_i, $i = 1, \dots, n-k$ và σ_{1^i}, $i = 1, \dots, k$ được gọi là các *lớp Schubert đặc biệt*.

Theo [20, Bổ đề 4.5], các lớp Schubert σ_a tạo thành một tập sinh cho vành Chow của đa tạp Grassmann $G(k,n)$.

1.4 Đa thức đối xứng

Định nghĩa 1.4.1 ([42, Chương 1])**.** *Đa thức đối xứng sơ cấp thứ k* theo các biến $x_1, \dots, x_r$, ký hiệu bởi $e_k(x_1, \dots, x_r)$, được định nghĩa như sau:

$$e_k(x_1, \dots, x_r) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r} x_{i_1} \dots x_{i_k}, \text{ với mọi } 1 \leq k \leq r.$$

Định nghĩa 1.4.2 ([42, Chương 1])**.** *Đa thức đối xứng thuần nhất đầy đủ thứ k* theo các biến $x_1, \dots, x_r$, ký hiệu bởi $h_k(x_1, \dots, x_r)$, được định nghĩa như sau:

$$h_k(x_1, \dots, x_r) := \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq r} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}, \text{ với mọi } 1 \leq k \leq r.$$

Định nghĩa 1.4.3 ([42, Chương 1])**.** Với mỗi phân hoạch $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, *đa thức Schur* được định nghĩa như sau:

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_r) := \frac{a_{\lambda+\delta_r}}{a_{\delta_r}},$$

trong đó $\delta_r = (r-1, \dots, 1, 0)$,

$$a_{\lambda+\delta_r} = \det(x_i^{\lambda_j + r - j})_{r \times r} = \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+r-1} & x_1^{\lambda_2+r-2} & \cdots & x_1^{\lambda_r} \\ x_2^{\lambda_1+r-1} & x_2^{\lambda_2+r-2} & \cdots & x_2^{\lambda_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_r^{\lambda_1+r-1} & x_r^{\lambda_2+r-2} & \cdots & x_r^{\lambda_r} \end{vmatrix} \text{ và } a_{\delta_r} = \det(x_i^{r-j})_{r \times r} = \begin{vmatrix} x_1^{r-1} & x_1^{r-2} & \cdots & 1 \\ x_2^{r-1} & x_2^{r-2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_r^{r-1} & x_r^{r-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

1.5 Lý thuyết giao đẳng biến

Định lý 1.5.1 (Atiyah-Bott [6], Berline-Vergne [8])**.** *Giả sử rằng X là một đa tạp xạ ảnh được trang bị một tác động xuyến với hữu hạn điểm cố định. Với mỗi $\alpha \in A_*^T(X)$, ta có*

$$\int_X \alpha = \sum_{p \in X^T} \frac{\alpha|_p}{e_p}, \tag{1.1}$$

trong đó e_p là lớp Euler đẳng biến của phân thớ tiếp xúc tại điểm cố định p và $\alpha|_p$ là sự hạn chế của α tới điểm p.

Chương 2

Bậc của đa tạp Fano

Bằng ngôn ngữ của Lý thuyết giao, Fulton [22] đã chỉ ra rằng bậc của đa tạp Fano có thể biểu diễn như là một số giao của các lớp đặc trưng trên đa tạp Grassmann. Trên cơ sở đó, các công thức tường minh về bậc của đa tạp Fano cũng được đưa ra bởi Debarre - Manivel [16] và Hiep [31]. Gần đây, trong [33], Hiep đã đề xuất kỹ thuật mới để xử lý số giao của các lớp đặc trưng trên đa tạp Grassmann, kết quả này là công cụ để thiết lập các công thức liên quan đến những bất biến của đa tạp đại số. Trong luận án, chúng tôi tiếp cận hướng nghiên cứu này để đưa ra một đặc trưng tổ hợp cho bậc của đa tạp Fano của các không gian con tuyến tính trên một giao đầy đủ trong không gian xạ ảnh phức dưới dạng hệ số của một đơn thức đặc biệt trong sự phân tích của một đa thức đối xứng. Hơn nữa, trong trường hợp chiều của đa tạp Fano bằng một, chúng tôi chỉ ra công thức liên hệ giữa giữa giống và bậc. Trong chương này, chúng tôi trình bày các kết qủa chính trong hai bài báo [34] và [36].

2.1 Đa tạp Fano

Định nghĩa 2.1.1 ([27, Ví dụ 6.19])**.** Cho X là một đa tạp xạ ảnh trên không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ và k là một số nguyên dương sao cho $1 \leq k \leq n$. *Đa tạp Fano* $F_k(X)$ là tập hợp gồm tất cả không gian con tuyến tính k chiều chứa trong X, nghĩa là

$$F_k(X) = \{W \subset X | \dim W = k\} \subset G(n+1, k+1).$$

Đa tạp Fano $F_k(X)$ là đa tạp con trơn của đa tạp Grassmann $G(k+1, n+1)$.

2.2 Nguyên lý chẻ

Định lý 2.2.1 ([20, Mục 5.4])**.** *(Nguyên lý chẻ). Cho E là một phân thớ vectơ hạng r trên đa tạp xạ ảnh X. Khi đó, tồn tại một đa tạp xạ ảnh Y và một đồng cấu phẳng $f : Y \to X$ sao cho*

i. Đồng cấu kéo về $f^* : A(X) \to A(Y)$ là đơn ánh;

ii. $f^*(E) \cong L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$, với L_i là phân thớ đường thẳng trên Y.

2.3 Đặc trưng số giao trên đa tạp Grassmann

Định lý 2.3.1 ([33, Hệ quả 1])**.** *Giả sử rằng $\Phi(\mathcal{S})$ được đại diện bởi một đa thức đối xứng $P(x_1, \ldots, x_k)$ với bậc không lớn hơn $k(n-k)$, trong đó các biến $x_1, \ldots, x_k$ là các nghiệm Chern của $\mathcal{S}$ và $\Psi(\mathcal{Q})$ được đại diện bởi một đa thức đối xứng $Q(y_1, \ldots, y_{n-k})$ với bậc không lớn hơn $k(n-k)$, trong đó các biến $y_1, \ldots, y_{n-k}$ là các nghiệm Chern của $\mathcal{Q}$. Khi đó chúng ta có các khẳng định sau đây:*

i.

$$\int_{G(k,n)} \Phi(\mathcal{S}) = (-1)^{k(n-k)} \frac{c(k,n)}{k!},$$

trong đó $c(k,n)$ là hệ số của đơn thức $x_1^{n-1} \ldots x_k^{n-1}$ trong khai triển của đa thức

$$P(x_1, \ldots, x_k) \prod_{j \neq i} (x_i - x_j).$$

ii.

$$\int_{G(k,n)} \Psi(\mathcal{Q}) = \frac{c(k,n)}{(n-k)!},$$

trong đó $c(k,n)$ là hệ số của đơn thức $y_1^{n-1} \ldots y_{n-k}^{n-1}$ trong khai triển của đa thức

$$Q(y_1, \ldots, y_{n-k}) \prod_{j \neq i} (y_i - y_j).$$

2.4 Bậc của đa tạp Fano của các không gian con tuyến tính trên các siêu mặt xạ ảnh

Cho X là một siêu mặt đủ tổng quát bậc d trên không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ và k là một số nguyên dương sao cho $1 \leq k \leq n$. Để thuận tiện, ta đặt $\delta(n,k,d) = (k+1)(n-k) - \binom{d+k}{k}$.

Trong bài báo [38], Langer đã đưa ra kết quả về chiều của $F_k(X)$ như sau:

Định lý 2.4.1 ([38, Định lý 0.1])**.** *Cho $X \subset \mathbb{P}^n$ là một siêu mặt đủ tổng quát bậc d. Giả sử rằng $d \neq 2$ (hoặc $n \geq 2k+1$). Khi đó*

i. Nếu $\delta(n,k,d) < 0$ thì $F_k(X) = \emptyset$,

ii. Nếu $\delta(n,k,d) \geq 0$ thì $F_k(X)$ là đa tạp trơn đa tạp Grassmann $G(k+1, n+1)$ có chiều bằng $\delta(n,k,d)$.

Lớp chu trình của $[F_k(X)]$ trong vành Chow $A^*(G(k+1; n+1))$ được mô tả bởi định lý sau:

Định lý 2.4.2 ([20, Mệnh đề 6.4])**.** *Cho $\mathcal{S}$ là phân thớ con phổ dụng trên đa tạp Grassmann $G(k+1, n+1)$ và $\mathrm{Sym}^d \mathcal{S}^*$ là luỹ thừa đối xứng thứ d của phân thớ đối ngẫu $\mathcal{S}^*$. Khi đó*

$$[F_k(X)] = c_{top}(\mathrm{Sym}^d \mathcal{S}^*) \in A^*(G(k+1; n+1)),$$

trong đó $c_{\mathrm{top}}(E)$ là lớp Chern cao nhất của phân thớ vectơ E.

Theo ngôn ngữ của Lý thuyết giao, bậc của $F_k(X)$ được biểu diễn như là một số giao của các lớp đặc trưng trên đa tạp Grassmann.

$$\deg(F_k(X)) = \int_{G(k+1,n+1)} c_{\binom{d+k}{d}}(\mathrm{Sym}^d \mathcal{S}^*) \cdot c_1(\mathcal{Q})^{\delta(n,k,d)}, \tag{2.1}$$

trong đó $\mathcal{S}$ và $\mathcal{Q}$ là các phân thớ con phổ dụng và phân thớ thương phổ dụng trên đa tạp Grassmann $G(k+1, n+1)$, $\mathrm{Sym}^d \mathcal{S}^*$ là luỹ thừa đối xứng thứ d của phân thớ đối ngẫu $\mathcal{S}^*$ và $c_i(E)$ là lớp Chern thứ i của phân thớ vectơ E. Công thức này được tìm thấy trong các tài liệu [22, Ví dụ 14.7.13] hoặc [40, Mục 3.5].

Theo ngôn ngữ của lý thuyết giao đẳng biến, Đặng Tuấn Hiệp [31] đã chứng minh bậc của $F_k(X)$ được biểu diễn dưới dạng tổng của các phân thức hữu tỉ như sau:

Định lý 2.4.3 ([31, Định lý 1.1])**.** *Lấy $k, n, d \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $d \neq 2$ (hoặc $n \geq 2k+1$) và $\delta(n, d, k) \geq 0$, và $X \subset \mathbb{P}^n$ là siêu mặt đủ tổng quát bậc d. Khi đó, bậc của đa tạp Fano $F_k(X)$ được xác định như sau*

$$\deg(F_k(X)) = (-1)^{\delta(n,k,d)} \sum_{I \in \mathcal{I}} \frac{S_I Q_I^{\delta(n,k,d)}}{T_I}, \tag{2.2}$$

trong đó tổng trên chạy trên khắp tất cả các tập I thuộc $\mathcal{I}$,

$$S_I = \prod_{v_i \in \mathbb{N}, \sum_{i\in I} v_i = d} \left(\sum_{i \in I} v_i h_i \right), \quad Q_I = \sum_{j \notin I} h_j \quad \text{và} \quad T_I = \prod_{i \in I} \prod_{j \notin I} (h_i - h_j).$$

2.5 Bậc của đa tạp Fano của các không gian con tuyến tính trên các giao đầy đủ xạ ảnh

Cho X là một giao đầy đủ tổng quát loại $\underline{d} = (d_1, \ldots, d_r)$ trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ với $n \geq 4$ và $d_i \geq 2$ với mọi $i = 1, \ldots, r$. Để thuận tiện, chúng ta đặt

$$\delta(n, \underline{d}, k) = (k+1)(n-k) - \sum_{i=1}^{r} \binom{d_i + k}{k}.$$

Định lý 2.5.1 ([16, Định lý 2.1])**.** *Nếu X không là giao đầy đủ bậc hai (hoặc $n \geq 2k + r$) và $\delta(n, \underline{d}, k) \geq 0$ thì đa tạp Fano $F_k(X)$ là đa tạp con trơn của đa tạp Grassmann $G(k+1, n+1)$ có chiều bằng $\delta(n, \underline{d}, k)$.*

Debarre - Manivel đã chỉ ra công thức tính bậc cho $F_k(X)$ như sau:

Định lý 2.5.2 ([16, Định lý 4.3])**.** *Với các ký hiệu nêu trên, nếu X không là giao đầy đủ bậc hai (hoặc $n \geq 2k + r$) và $\delta(n, \underline{d}, k) \geq 0$ thì bậc của đa tạp Fano $F_k(X)$ được xác định như sau:*

$$\deg(F_k(X)) = e(n, \underline{d}, k),$$

trong đó $e(n, \underline{d}, k)$ là hệ số của đơn thức $x_0^n x_1^{n-1} \cdots x_k^{n-k}$ trong khai triển của đa thức

$$\prod_{i=1}^{r} \prod_{a_0 + \cdots + a_k = d_i, a_i \in \mathbb{N}} (a_0 x_0 + \cdots + a_k x_k)(x_0 + \cdots + x_k)^{\delta(n,\underline{d},k)} \prod_{i<j} (x_i - x_j).$$

Sử dụng Định lý (2.3.1), chúng tôi đã đưa ra một đặc trưng tổ hợp cho bậc của đa tạp Fano $F_k(X)$ như sau:

Định lý 2.5.3. *Với các ký hiệu nêu trên, nếu X không là giao đầy đủ bậc hai (hoặc $n \geq 2k + r$) và $\delta(n, \underline{d}, k) \geq 0$ thì bậc của $F_k(X)$ được xác định bởi*

$$\deg(F_k(X)) = \frac{c(n, \underline{d}, k)}{(k+1)!}, \tag{2.3}$$

trong đó $c(n, \underline{d}, k)$ là hệ số của đơn thức $x_0^n \cdots x_k^n$ trong khai triển của đa thức

$$\prod_{i=1}^{r} \prod_{a_0+\cdots+a_k=d_i, a_i \in \mathbb{N}} (a_0x_0 + \cdots + a_kx_k)(x_0 + \cdots + x_k)^{\delta(n,\underline{d},k)} \prod_{i \neq j}(x_i - x_j).$$

2.6 Công thức giống - bậc của đường cong Fano

Định lý 2.6.1. *Cho X là một giao đầy đủ tổng quát loại $\underline{d} = (d_1, \ldots, d_r)$ trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$. Nếu $\delta(n, \underline{d}, k) = 1$ thì đa tạp Fano $F_k(X)$ là một đường cong xạ ảnh trơn liên thông với bậc d và giống g thỏa mãn đẳng thức sau:*

$$g = 1 + \frac{\sum_{i=1}^{r} \binom{d_i + k}{k+1} - n - 1}{2} d.$$

Chương 3

Đặc trưng Euler của phân thớ Tango

Năm 1976, Hiroshi Tango [51] đã xây dựng một phân thớ vectơ không phân tách được hạng $n-1$ trên không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$, gọi là phân thớ Tango. Áp dụng kỹ thuật tính toán của lý thuyết giao trên không gian xạ ảnh, chúng tôi đưa ra các kết quả cho các lớp đặc trưng của phân thớ Tango. Từ đó, dựa vào định lý Hirzebruch-Riemann-Roch, chúng tôi thiết lập công thức cho đặc trưng Euler của phân thớ Tango trên không gian xạ ảnh. Trong chương này, chúng tôi trình bày chi tiết các kết quả chính trong bài báo [14].

3.1 Xây dựng phân thớ Tango

Định lý 3.1.1 ([45, Định lý 4.3.3])**.** *Với mỗi số nguyên dương n, tồn tại một phân thớ vectơ T_n không phân tách được hạng $n-1$ trên không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ với*

$$c(T_n) = \frac{1-2h}{(1-h)^{n+1}},$$

với h là lớp siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n$. Phân thớ vectơ T_n được gọi là phân thớ Tango trên $\mathbb{P}^n$.

3.2 Định lý Hirzebruch-Riemann-Roch

Định nghĩa 3.2.1 ([22, Chương 3])**.** Cho E là một phân thớ vectơ hạng r trên đa tạp xạ ảnh trơn X. Gọi $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$ là các nghiệm Chern của phân thớ vectơ E.

Đặc trưng Chern của phân thớ vectơ E, ký hiệu là $\mathrm{ch}(E)$, được định nghĩa bởi $\mathrm{ch}(E) = \sum_{i=1}^r e^{\alpha_i}$.

Lớp Todd của phân thớ vectơ E, ký hiệu là $\mathrm{td}(E)$, được định nghĩa bởi $\mathrm{td}(E) = \prod_{i=1}^r \dfrac{\alpha_i}{1-e^{-\alpha_i}}$.

Mệnh đề 3.2.1 ([22, Chương 3])**.** *Mối liên hệ giữa đặc trưng Chern và các lớp Chern của một phân thớ vectơ E được cho bởi*

$$\mathrm{ch}(E) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\det(M_k),$$

trong đó $c_k = c_k(E)$ và ma trận M_k được xác định như sau

$$M_k = \begin{pmatrix} c_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2c_2 & c_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (k-1)c_{k-1} & c_{k-2} & c_{k-3} & \cdots & 1 \\ kc_k & c_{k-1} & c_{k-2} & \dots & c_1 \end{pmatrix}$$

Định lý 3.2.1 ([22, Chương 15])**.** *(Định lý Hirzebruch-Riemann-Roch). Đặc trưng Euler của phân thớ vectơ E trên đa tạp xạ ảnh trơn X được tính bởi công thức*

$$\chi(X, E) = \int_X \mathrm{ch}(E).\,\mathrm{td}(T_X), \tag{3.1}$$

trong đó $\int_X \alpha$ là bậc của chu trình α trong vành Chow $A(X)$.

3.3 Đặc trưng Chern của phân thớ Tango

Mệnh đề 3.3.1. *Các lớp Chern của phân thớ Tango T_n trên không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ được xác định*

$$c_k(T_n) = \left[\binom{n+k}{k} - 2\binom{n+k-1}{k-1}\right] h^k,\ \ k = 1, 2, \dots,$$

với h là lớp siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n$.

Mệnh đề 3.3.2. *Với số nguyên $n \geq 3$, đặc trưng Chern của phân thớ Tango T_n trên không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ được xác định bởi*

$$\mathrm{ch}(T_n) = (n-1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-2)^k - (-1)^k(n+1)}{k!} h^k.$$

trong đó h là lớp siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n$.

3.4 Lớp Todd của phân thớ tiếp xúc trên không gian xạ ảnh

Định nghĩa 3.4.1. ([47, Chương 4]). Cho các số nguyên dương k và n. Các *số Stirling loại một*, ký hiệu là $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, được định nghĩa bởi hệ số của x^k trong khai triển của

$$R_n(x) = x(x+1)\dots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

Ta quy ước $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$.

Mệnh đề 3.4.1. *Lớp Todd của phân thớ tiếp xúc trên* $\mathbb{P}^n$ *là*

$$\operatorname{td}(T_{\mathbb{P}^n}) = \left(\frac{h}{1-e^{-h}}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} S_k(n)\frac{h^k}{k!}.$$

trong đó h *là lớp siêu phẳng trong* $\mathbb{P}^n$*.*

3.5 Đặc trưng Euler của phân thớ Tango trên không gian xạ ảnh

Định lý 3.5.1. *Cho* E *là một phân thớ vectơ trên không gian xạ ảnh* $\mathbb{P}^n$*. Khi đó đặc trưng Euler của phân thớ* E *là*

$$\chi(\mathbb{P}^n, E) = \operatorname{rank}(E) + \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} \det(M_k).$$

trong đó M_k *là ma trận được xác định như trong Mệnh đề 3.2.1.*

Định lý 3.5.2. *Đặc trưng Euler của phân thớ Tango* T_n *trên không gian xạ ảnh* $\mathbb{P}^n$ *là* $2n-1$*.*

Chương 4

Bậc đại số của quy hoạch trong xác định

Quy hoạch nửa xác định là một bài toán quan trọng của Quy hoạch toán học bắt đầu từ năm 1990. Bài toán này có ứng dụng rất đa dạng trong Tối ưu lồi, Lý thuyết điều khiển và Tối ưu hóa tổ hợp. Bắt đầu từ mối liên hệ giữa bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định với số giao của các lớp đặc trưng trên đa tạp Grassmann được đưa ra bởi von Bothmer-Ranestad [11]. Sử dụng các kết quả liên quan đến đồng nhất thức trên đa thức đối xứng kép và kỹ thuật xử lý số giao của các lớp đặc trưng trên đa tạp Grassmann được đưa ra bởi Hiep [33], chúng tôi đưa ra một đặc trưng tổ hợp cho bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định.

Trong chương này, chúng tôi trình bày các kết quả chính của bài báo [37]. Cụ thể hơn, chúng tôi đưa ra một đặc trưng tổ hợp cho bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định thông qua hệ số của một đơn thức trong khai triển của một đa thức đối xứng kép. Đồng thời, sử dụng đặc trưng này kết hợp với các kết quả của đa thức đối xứng, chúng tôi sẽ chứng minh lại những kết quả được chỉ ra bởi Nie-Ranestad-Sturmfels trong [44] theo một cách đơn giản hơn.

4.1 Bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định

Bài toán 4.1.1 ([44])**.** *Quy hoạch nửa xác định là một bài toán tối ưu có dạng:*

$$\min_{X \in \mathbb{S}^n} C \bullet X, \tag{4.1}$$

với các ràng buộc

$$A_i \bullet X = b_i, \forall i = 1, \ldots, m; \tag{4.2}$$

$$X \succeq 0; \tag{4.3}$$

trong đó $C, A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{QS}^n, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{Q}$.

Bài toán 4.1.2. *Đối ngẫu của quy hoạch nửa xác định là bài toán được phát biểu như sau:()*

$$\max_{y \in \mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i, \text{ với ràng buộc } A(y) = C - \sum_{i=1}^{m} y_i A_i \succeq 0.$$

Định lý 4.1.1 ([53, Mục 3] hoặc [55, Chương 4]). *Giả sử quy hoạch nửa xác định và đối ngẫu của nó thỏa mãn chặt. Khi đó, tồn tại phương án tối ưu $\hat{X} \in \mathbb{S}^n$ và $\hat{y} \in \mathbb{R}^m$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

$$A_i \bullet \hat{X} = b_i, \forall i = 1, 2, \ldots, m, \tag{4.4}$$

$$A(\hat{y}) \cdot \hat{X} = 0, \tag{4.5}$$

$$A(\hat{y}) \succeq 0 \text{ và } \hat{X} \succeq 0. \tag{4.6}$$

Với m, n rất lớn, việc giải các phương trình 4.4 - 4.5 không dễ dàng. Tuy nhiên chúng ta biết rằng các tọa độ $\hat{y}_i$ và $\hat{x}_{jk}$ của phương án tối ưu là các nghiệm của các đa thức một biến bất khả quy trên $\mathbb{Q}$. Nếu dữ liệu là tổng quát thì bậc của các đa thức này chỉ phụ thuộc vào hạng r của phương án tối ưu. Bậc này được gọi là *bậc đại số* trong quy hoạch nửa xác định (4.1.1) và đối ngẫu của nó, ký hiệu là $\delta(m, n, r)$.

Chú ý rằng, bậc đại số $\delta(m, n, r)$ trong quy hoạch nửa xác định được định nghĩa tốt nếu bộ ba số (m, n, r) thỏa mãn bất đẳng thức Pataki sau:

Định lý 4.1.2 ([44, Mệnh đề 5]). *(Bất đẳng thức Pataki). Cho r và $n - r$ lần lượt là hạng của các ma trận tối ưu $A(\hat{y})$ và $\hat{X}$. Khi đó, ta có:*

$$\binom{n-r+1}{2} \leq m \leq \binom{n+1}{2} - \binom{r+1}{2}.$$

4.2 Bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định thông qua bậc của đa tạp đối ngẫu

Nie, Ranestad và Sturmfels [44] đã chỉ ra công thức bậc đại số $\delta(m, n, r)$ của quy hoạch nửa xác định trùng với bậc của đa tạp đối ngẫu bằng cách sử dụng phương pháp của hình học đại số phức.

Cho $\mathcal{U} = \{C, A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ là một không gian con tuyến tính sinh bởi hệ $m+1$ ma trận đối xứng thuộc $\mathbb{S}^n$. Ta kí hiệu $D^r_{\mathcal{U}}$ là đa tạp định thức của các ma trận đối xứng hạng không lớn hơn r trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}(\mathcal{U})$ tương ứng.

Định lý 4.2.1 ([44, Định lý 13]). *Đa tạp đối ngẫu $(D^r_{\mathcal{U}})^*$ là một siêu mặt nếu và chỉ nếu bất đẳng thức Pataki thỏa mãn và trong trường hợp này bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định bằng bậc của siêu mặt $(D^r_{\mathcal{U}})^*$.*

Đặc biệt, nghiên cứu của họ đã đưa ra một số công thức tường minh của bậc đại số $\delta(m, n, r)$ với các giá trị đặc biệt khác nhau của m, n, r.

4.3 Bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định như số giao trên đa tạp Grassmann

Theo ngôn ngữ của Lý thuyết giao, von Bothmer và Ranestad [11] đã chỉ ra rằng bậc đại số của quy hoạch nửa xác định có thể tính như số giao trên đa tạp Grassmann.

Với bộ ba số (m, n, r) thỏa mãn bất đẳng thức Pataki (4.1.2), để thuận tiện trong việc trình bày công thức ta đặt:

$$u = m - \binom{n-r+1}{2} \text{ và } v = \binom{n+1}{2} - m - \binom{r+1}{2}.$$

Định lý 4.3.1 ([11, Mệnh đề 4.1])**.** *Bậc đại số $\delta(m, n, r)$ trong quy hoạch nửa xác định được xác định bởi công thức sau:*

$$\delta(m, n, r) = \int_{G(r,n)} s_u(\mathrm{Sym}^2 \mathcal{Q}) s_v(\mathrm{Sym}^2 \mathcal{S}^*), \tag{4.7}$$

trong đó $\mathcal{S}$ và $\mathcal{Q}$ lần lượt là phân thớ con phổ dụng và phân thớ thương phổ dụng trên đa tạp Grassmann $G(r, n)$, $\mathrm{Sym}^2\mathcal{Q}$ và $\mathrm{Sym}^2\mathcal{S}^*$ lần lượt là lũy thừa đối xứng thứ hai của $\mathcal{Q}$ và của đối ngẫu $\mathcal{S}^*$, $s_i(E)$ là lớp Segre thứ i của phân thớ vectơ E.

Bằng cách sử dụng các kết quả cơ bản của hàm Schur, von Bothmer và Ranestad trong [11] đã chỉ ra công thức tổng quát cho bậc đại số của quy hoạch nửa xác định dưới dạng tổng của các hàm theo các dãy con của tập $\{1, \ldots, n\}$.

Đặt

$$\psi_i = 2^{i-1}, \psi_{i,j} = \sum_{k=i}^{j-1} \binom{i+j-2}{k} \text{ khi } i < j,$$

$$\psi_{i_1,\ldots,i_r} = \begin{cases} Pf(\psi_{i_s,i_t})_{1\leq s<t\leq r} & \text{nếu } r \text{ chẵn} \\ Pf(\psi_{i_s,i_t})_{0\leq s<t\leq r} & \text{nếu } r \text{ lẻ} \end{cases}$$

trong đó $\psi_{i_0,i_k} = \psi_{i_k}$ và Pf ký hiệu là Pfaffian của ma trận phản đối xứng.

Định lý 4.3.2 ([11, Định lý 1.1])**.** *Bậc đại số $\delta(m, n, r)$ được xác định bởi công thức sau:*

$$\delta(m, n, r) = \sum_I \psi_I \psi_{I^c},$$

trong đó tổng trên chạy trên khắp các dãy con tăng ngặt $I = \{i_1, \ldots, i_{n-r}\}$ của $\{1, \ldots, n\}$ với chiều dài $n - r$, $i_1 + \ldots + i_{n-r} = m$ và $I^c = \{1, \ldots, n\} \setminus I$.

4.4 Bậc đại số của quy hoạch nửa xác định

Áp dụng kết quả von Bothmer và Ranestad và kỹ thuật địa phương hóa trong lý thuyết giao đẳng biến, một công thức tính bậc đại số của quy hoạch nửa xác định được chỉ ra bởi Đặng Tuấn Hiệp như sau:

Trên vành đa thức $\mathbb{Q}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$, với mỗi tập con I chứa r phần tử của tập $\{1, \ldots, n\}$, chúng ta định nghĩa:

$$A_{v,I} = \det \begin{pmatrix} e_1(\Lambda_I) & e_2(\Lambda_I) & e_3(\Lambda_I) & \dots & e_v(\Lambda_I) \\ 1 & e_1(\Lambda_I) & e_2(\Lambda_I) & \dots & e_{v-1}(\Lambda_I) \\ 0 & 1 & e_1(\Lambda_I) & \dots & e_{v-3}(\Lambda_I) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e_1(\Lambda_I) \end{pmatrix}_{v\times v},$$

trong đó $e_i(\Lambda_I)$ là đa thức đối xứng cơ bản thứ i theo $\binom{r+1}{2}$ biến là các phần tử của tập

$$\Lambda_I := \left\{\lambda_i + \lambda_j \mid i, j \in I, i \leq j\right\},$$

và

$$T_I = \prod_{i\in I}\prod_{j\notin I}(\lambda_j - \lambda_i).$$

Định lý 4.4.1 ([30, Định lý 1]). *Bậc đại số $\delta(m,n,r)$ được xác định bởi công thức sau:*

$$\delta(m,n,r) = (-1)^v \sum_I \frac{A_{u,I^c}A_{v,I}}{T_I}, \tag{4.8}$$

trong đó tổng trên chạy trên khắp các dãy con I tăng ngặt chứa r phần tử của $\{1,\dots,n\}$, $I^c = \{1,\dots,n\} \setminus I$.

Vế phải của công thức (4.8) là một hàm phân thức đối xứng và nó là một hàm hằng, hơn nữa nó là một số nguyên.

4.5 Đồng nhất thức liên quan đến đa thức đối xứng kép

Trong phần này, chúng tôi đề cập đến một đồng nhất thức liên quan đến đa thức đối xứng kép được chỉ ra bởi Hiep [33], vì sự cần thiết của kết quả này trong chứng minh ở phần sau.

Để thuận tiện cho phần trình bày công thức, ta sẽ sử dụng ký hiệu $[n]$ thay cho tập $\{1,\dots,n\}$. Với mỗi tập con $I = \{i_1,\dots,i_r\} \subset [n]$ thì đặt $\lambda_I = (\lambda_{i_1},\dots,\lambda_{i_r})$ và $I^c = [n]\setminus I$.

Định lý 4.5.1 ([33, Định lý 1.2]). *Cho*

$$P(x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_{n-r}) \in \mathbb{Q}[x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_{n-r}]$$

là một đa thức đối xứng kép có bậc không lớn hơn $r(n-r)$. Khi đó

$$\sum_{I\subset[n],\#I=r} \frac{P(\lambda_I,\lambda_{I^c})}{\prod_{i\in I,j\in I^c}(\lambda_i-\lambda_j)} = \frac{d(r,n)}{r!(n-r)!},$$

trong đó $d(r,n)$ là hệ số của đơn thức $x_1^{n-1}\cdots x_r^{n-1}y_1^{n-1}\cdots y_{n-r}^{n-1}$ trong khai triển của đa thức

$$P(x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_{n-r})\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)\prod_{j\neq i}(y_i-y_j)\prod_{i=1}^{n-k}\prod_{j=1}^{r}(y_i-x_j).$$

Trong [33], kết quả của Định lý 4.5.1 được trình bày nhưng phần chứng minh đã bị bỏ qua. Ở đây, chúng tôi chứng minh định lý này bằng cách sử dụng một lập luận hiệu quả được lấy cảm hứng từ kết quả của Don Zagier trong [25, Mệnh đề A.1] hoặc [35, Bổ đề 2].

4.6 Một đặc trưng mới cho bậc đại số của quy hoạch nửa xác định

Bắt đầu từ mối liên hệ của bậc đại số trong quy hoạch nửa xác định với số giao của các lớp đặc trưng trên đa tạp Grassmann đề xuất bởi von Bothmer-Ranestad [11]. Sử dụng kết quả của Đặng Tuấn Hiệp [33] về đặc trưng của số giao trên đa tạp Grassmann, chúng tôi chỉ ra một đặc trưng mới cho bậc đại số của quy hoạch nửa thông qua hệ số của một đơn thức trong khai triển của một đa thức đối xứng kép.

Định lý 4.6.1. *Bậc đại số $\delta(m,n,r)$ của quy hoạch nửa xác định được cho bởi công thức sau:*

$$\delta(m,n,r) = (-1)^v \frac{c(m,n,r)}{r!(n-r)!}, \tag{4.9}$$

trong đó $c(m,n,r)$ là hệ số của đơn thức $x_1^{n-1}\cdots x_r^{n-1}y_1^{n-1}\cdots y_{n-r}^{n-1}$ trong khai triển của đa thức

$$h_v(\mathcal{X})h_u(\mathcal{Y})\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)\prod_{j\neq i}(y_i-y_j)\prod_{i=1}^{n-r}\prod_{j=1}^{r}(y_i-x_j),$$

với $h_u(\mathcal{X})$ là đa thức đối xứng thuần nhất đầy đủ thứ u theo $\binom{r+1}{2}$ biến là các phần tử của tập

$$\mathcal{X} := \left\{x_i+x_j \mid 1\leq i\leq j\leq r\right\}, \tag{4.10}$$

và $h_v(\mathcal{Y})$ là đa thức đối xứng thuần nhất đầy đủ thứ v theo $\binom{n-r+1}{2}$ biến là các phần tử của tập

$$\mathcal{Y} := \left\{y_i+y_j \mid 1\leq i\leq j\leq n-r\right\}. \tag{4.11}$$

Chú ý rằng, kết quả của Định lý 4.6.1 cung cấp một phương pháp tổ hợp để tính các bậc đại số của bài toán quy hoạch nửa xác định.

4.7 Một số kết quả của đa thức đối xứng

Chúng tôi chứng minh hai bổ đề dưới đây vì chúng rất cần thiết trong chứng minh các kết quả của các phần sau.

Mệnh đề 4.7.1. *Cho $\mathcal{X}$ là tập được xác định như trong (4.10). Khi đó, hệ số của đơn thức $x_1^r\cdots x_r^r$ khai triển của trong đa thức*

$$e_k(x_1,\ldots,x_r)h_{r-k}(\mathcal{X})\prod_{j\neq i}(x_i-x_j) \tag{4.12}$$

là $\binom{r+1}{k+1}r!$.

Mệnh đề 4.7.2. *Cho $\mathcal{X}$ là tập hợp được xác định như trong (4.10). Khi đó, hệ số của đơn thức $x_1^{r+1}\cdots x_r^{r+1}$ trong khai triển của đa thức*

$$e_k(x_1,\ldots,x_r)h_{2r-k}(\mathcal{X})\prod_{j\neq i}(x_i-x_j) \tag{4.13}$$

là $(k+1)\binom{r+3}{k+3}r!$.

4.8 Một số ví dụ và áp dụng

Áp dụng Định lý 4.6.1, Mệnh đề 4.7.1 và Mệnh đề 4.7.2, chúng tôi sẽ chứng minh bốn kết quả được dự đoán bởi Nie, Ranestad và Sturmfels [44].

Mệnh đề 4.8.1. *Bậc đại số của quy hoạch nửa xác định $\delta(m, n, r)$ thỏa mãn quan hệ đối ngẫu*

$$\delta(m, n, r) = \delta\left(\binom{n+1}{2} - m, n, n-r\right).$$

Mệnh đề 4.8.2. *Ta có:*

$$\delta(m, n, n-1) = 2^{m-1}\binom{n}{m}.$$

Mệnh đề 4.8.3. *Ta có:*

$$\delta(3, n, n-2) = \binom{n+1}{3}.$$

Mệnh đề 4.8.4. *Ta có:*

$$\delta(4, n, n-2) = 6\binom{n+1}{4}.$$

Tài liệu tham khảo

[1] F. Alizadeh, J. P. A. Haeberly, M. L. Overton (1997), Complementarity and nondegeneracy in semidefinite programming, *Mathematical Program*, 77(1), 111 - 128.

[2] André L. Meireles Araújo, Isreal Vainsencher (2001), *Equivariant intersection theory and Bott's residue formula*, Mat. Contemp, 20, 1–70

[3] G. E. Andrews (1976), *The Theory of Partitions*, Addison-Wesley Publishing.

[4] A. B. Altman, S.L. Kleiman (1977), Foundations of the theory of Fano schemes, *Compositio Math*, 34, 3 - 47.

[5] Andreas Gathmann (2002), *Algebraic Geometry*, Notes for a class taught at the University of Kaiserslautern.

[6] M. F. Atiyah, R. H. Bott (1984), The moment map and equivariant cohomology, *Topology*, 23, 1 - 28.

[7] W. Barth, A. Van de Ven (1978), Fano varieties of lines on hypersurfaces, *Arch. Math (Basel)*, 31, 96 - 104.

[8] N. Berline, M. Vergne (1982), Classes caractéristiques équivariantes. Formule de localisation en cohomologie équivariante. (French) [Equivariant characteristic classes. Localization formula in equivariant cohomology], *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math*, 295(9), 539-541.

[9] R. Bott (1967), A residue formula for holomorphic vector-fields, *J. Differential Geom*, 1, 311 - 330.

[10] M. Brion (1998), Equivariant cohomology and equivariant intersection theory (notes by Alvaro Rittatore), in Representation Theories and Algebraic Geometry (Montreal, PQ, 1997) *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci*, 514, Kluwer, Dordrecht, 1-37.

[11] H.C. G. von Bothmer, K. Ranestad (2009), A general formula for the algebraic degree in semidefinite programming, *Bull. London Math. Soc*, 41, 193 - 197.

[12] D. A. Cox, J. B. Little, D. B. O'Shea (2007), *Ideals, varieties, and algorithms: An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*, Third edition (Undergraduate Texts in Mathematics), Springer, New York.

[13] L. Costa, S. Marchesi, R. M. Miró-Roig (2016), Tango bundles on Grassmannians, *Mathematische Nachrichten*, 289 (8–9), 950–961.

[14] N. H. Cong, D. T. Hiep, N.T. M. Van (2022), Euler characteristic of Tango bundles, *Da Lat University Journal of science*, 12(2), 113 - 122.

[15] Cox, David A.; Katz, Sheldon (1999), *Mirror symmetry and algebraic geometry*, American Mathematical Society.

[16] O. Debarre, L. Manivel (1998), Sur la variété des espaces linéaires contenus dans une intersection complète, Math. Ann. 312 , 549 - 574.

[17] D. Edidin, W. Graham (1998), *Equivariant Intersection theory*, Invent. math, 131, 595 - 634.

[18] D. Edidin, W.Graham (1998), *Localization in equivariant intersection theory and the Bott residue formula*, Amer. J. Math. 120, 619–636

[19] D. Eisenbud (1995), *Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry*, Springer - Verlag.

[20] D. Eisenbud, J. Harris (2016), 3264 *and all that: A second course in algebraic geometry*, Cambridge University Press.

[21] W. Fulton (1980), *Introduction to intersection theory in algebraic geometry*, Amer. Math. Soc. Rrovidence, Rhode Island

[22] W. Fulton (1998), *Intersection theory*, second edition, Springer-Verlag.

[23] Grayson, D., Stillman, M.:*Macaulay 2, a software system for research in algebraic geometry*, Available at http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2.

[24] P. Griffiths, J. Harris (1978), *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley-Interscience John Wiley and Sons, New York.

[25] D. B. Grünberg, P. Moree (2008), Sequences of Enumerative Geometry: Congruences and Asymptotics, with an appendix by Don Zagier, *Experimental Math,* 17, 409-426.

[26] R. Hartshorne (1979), Algebraic vector bundles on projective spaces: A problem list, *Topology*, 18 (2), 117 - 128.

[27] J. Harris (1992), *Algebraic Geometry A First Course*, Springer, Berlin.

[28] B. Hassett (2007), *Introduction to Algebraic Geometry*, Cambridge University Press.

[29] F. Hirzebruch (1978), *Topological methods in algebraic geometry*, Springer-Verlag.

[30] D. T. Hiep (2014), Intersection Theory and applications to the computation of Gromov-Witten invariants, *PhD thesis, University of Kaiserslautern.*

[31] D. T. Hiep (2016), On the degree of Fano schemes of linear subspaces on hypersurfaces, *Kodai Math*, 39, 110-118.

[32] D. T. Hiep (2016), A formula for the algebraic degree in semidefinite propramming, *Kodai Math*, 39 (3), 484 – 488.

[33] D. T. Hiep (2019), Identities involving (doubly) symmetric polynomials and integrals over Grassmannians, *Fundamenta Mathematicae*, 246, 181-191.

[34] D. T. Hiep, N. C. Tu, N. T. M. Van (2019), A genus-degree formula for Fano varieties of linear subspaces on complete intersections, *Quy Nhon University Journal of Science*,13,91-97.

[35] D. T. Hiep, N. C. Tu (2021), An identity involving symmetric poly nomials and the geometry of Lagrangian Grassmannians, *Journal of Algebra*, 565, 564-581.

[36] D. T. Hiep, N. T. M. Van (2020), A characterization for the degree of Fano varieties, *Quy Nhon University Journal of Science*, 14(3), 53-59.

[37] D. T. Hiep, N. T. N. Giao, N. T. M. Van (2023), A characterization of the algebraic degree in semidefinite programming, *Collectanea Mathematica*, 4, 443 - 455.

[38] A. Langer (1997), Fano schemes of linear spaces on hypersurfaces, *Manuscripta Math*, 93 , 21-28.

[39] D. Laksov, A. Lascoux, A. Thorup (1989), On Giambelli's theorem on complete correlations, *Acta Math*, 162, 143–199

[40] L. Manivel (2001), *Symmetric functions: Schubert polynomials and degeneracy loci*, AMS Texts and Monographs, Providence, RI.

[41] L. Manivel, M. Michalek, L. Monin, T. Seynnaeve, M. Vodicka (2020), Complete Quadrics: Schubert Calculus For Gaussian Models and Semidefinite Programming, *arXiv:2011.08791.*

[42] I. G. Macdonald (1998), *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford University press.

[43] D. G. Markushevich (1981), Numerical invariants of families of lines on some Fano varieties, *(Russian) Mat. Sb.(N.S)*, 116(158), 265-288, *English transl (1983), in Math.USSR-Sb*, 44, 239 - 260.

[44] J. Nie, K. Ranestad, B. Sturmfels (2010), The algebraic degree of semidefinite programming, *Math. Program. Ser. A*, 122, 379 - 405.

[45] Christian Okonek, Michael Schneider, Heinz Spindler (1980), *Vector bundles on complex projective spaces, With an Appendix by S.I. Gelfand*, Progress in Mathematics 3, Basel and Boston, Birkhauser.

[46] Prasad, Amritanshu (2019), An introduction to Schur polynomials, *Graduate J. Math*, 4, 62 – 84.

[47] Steven Rotman (1984), *The umbral calculus, Pure and applied mathematics 111*, Academic Press, Inc.

[48] Karen E. Smith, Lauri Kahanpää, Pekka Kekäläinen, William Traves (2000), *An Invitation to Algebraic Geometry*, Springer-Verlag New York, Inc.

[49] R. P. Stanley (1999), *Enumerative combinatorics, Volume 2*, Cambridge studies in advanced mathematics, Cambridge University Press, 62.

[50] Sturm (1999), J.F.: *SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones*, Optim. Methods Softw, 11, 12, 625–653.

[51] H. Tango (1976), An example of indecomposable vector bundle of rank $n-1$ on $\mathbb{P}^n$, *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 16(1), 137–141.

[52] B. R. Tennison (1974),*On the quartic threefold*, Proc. London Math. Soc. (3), **29**, 714-734.

[53] L. Vandenberghe, S. Boyd (1996), Semidefinite programming, *SIAM Rev*, 38, 49 - 95.

[54] A. Weber (2012), Equivariant Chern classes and localization theorem, *Journal of Singularities*, 5, 153 - 176.

[55] H. Wolkowicz, R. Saigal, L. Vandenberghe (2000), *Handbook of Semidefinite Programming*, Kluwer, Dordrecht.

[56] D. Zeilberger (1982), A combinatorial proof of Dyson's conjecture, *Discrete Math*, 41, 317-321.

[57] M. Zielenkiewicz (2014), Integration over homogeneous spaces for classical Lie groups using iterated residues at infinity, *Cent. Eur. J. Math*, 12, 574–583.